

SCIENCES SUP

*Aide-mémoire*

Licence • Prépas

# AIDE-MÉMOIRE MÉCANIQUE GÉNÉRALE



*Lise Lamoureux  
Danielle Fortuné*

DUNOD

ivalentes,  
convient

appels de

-dire à la  
ment des

s notions  
étique, ...  
e principe  
ns qui en  
ns.

des, défi-  
nergies

tient aux  
vibrations

cours clôt

Bougant,  
rès bonne  
oration de

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

## Table des matières

AVANT-PROPOS	III
CHAPITRE 1 • OUTILS MATHÉMATIQUES	1
1.1 Vecteurs. Bases. Repères	1
1.2 Produit vectoriel	2
1.2.1 Double produit vectoriel	3
1.2.2 Division vectorielle	3
1.2.3 Produit mixte	4
1.3 Applications de $E^3$ dans $E^3$	5
1.3.1 Applications linéaires	5
1.3.2 Applications antisymétriques	5
1.3.3 Applications linéaires symétriques	7

1.4	Vitesse et accélération d'un point	9
1.4.1	Coordonnées cartésiennes	9
1.4.2	Coordonnées cylindriques	9
1.4.3	Coordonnées sphériques	10
1.4.4	Repère de Frénet	10
<b>CHAPITRE 2 • TORSEURS</b>		<b>13</b>
2.1	Vecteur libre. Vecteur lié. Champ de vecteurs. Moment d'un vecteur lié	13
2.2	Champ de moments. Champ équiprojectif	14
2.3	Équivalence d'un champ équiprojectif et d'un champ de moments	15
2.4	Torseurs	16
2.5	Espace vectoriel des torseurs	18
2.6	Axe central d'un torseur $T$ de résultante non nulle	19
2.7	Torseur associé à une répartition vectorielle continue	22
<b>CHAPITRE 3 • CINÉMATIQUE DU SOLIDE</b>		<b>25</b>
3.1	Repère lié à un solide	25
3.2	Torseur cinématique	26
3.3	Dérivation d'un vecteur lié à $S$	28
3.4	Détermination de $\vec{\Omega}(S, \mathcal{R}_0)$	28
3.5	Mouvement de translation d'un solide	29
3.6	Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe	30
3.7	Mouvement de rotation autour d'un point	32
3.8	Exemple de calcul de $\vec{\Omega}(S, \mathcal{R}_0)$	33
3.9	Accélérations des points d'un solide	34

## CHAPITRES 4 - 5

5.1	Centre d'inertie
5.1.1	Détermination
5.1.2	Propriétés
5.1.3	Exemples
5.1.4	Exemple
5.1.5	Centre de gravité
5.2	Torseur cinématique
5.2.1	Détermination
5.2.2	Mouvement
5.2.3	Répartition
5.2.4	Énergie

9	CHAPITRE 4 • COMPOSITION DES MOUVEMENTS	37
9	4.1 Mouvement composé	37
9	4.2 Composition des vitesses	38
10	4.2.1 Point coïncidant	38
10	4.2.2 Relation entre les différentes vitesses	39
13	4.3 Dérivée d'un vecteur	41
13	4.4 Composition des mouvements de solides	42
13	4.4.1 Relation entre les vecteurs-rotation	42
14	4.4.2 Mouvement composé de $n$ solides	42
15	4.4.3 Mouvement inverse	43
16	4.5 Décomposition d'un mouvement de solide avec un point fixe	44
16	4.6 Composition des accélérations	46
18	4.7 Glissement	48
19	4.7.1 Point de contact	49
22	4.7.2 Vitesse de glissement	50
22	4.7.3 Exemple	51
25	CHAPITRE 5 • CINÉTIQUE	55
25	5.1 Centre d'inertie d'un solide	56
26	5.1.1 Définitions	56
28	5.1.2 Utilisation des propriétés de symétrie	56
28	5.1.3 Vitesse et accélération du centre d'inertie	57
29	5.1.4 Exemples	58
30	5.1.5 Centre d'inertie d'un système de solides	61
32	5.2 Torseur cinétique. Torseur dynamique	63
32	5.2.1 Définitions	63
33	5.2.2 Mouvement autour du centre d'inertie	64
33	5.2.3 Relation entre moment cinétique et moment dynamique	66
34	5.2.4 Énergie cinétique	67

<b>CHAPITRE 6 • OPÉRATEUR D'INERTIE</b>	71
6.1 Opérateur et matrice d'inertie	71
6.2 Repère principal d'inertie	73
6.3 Comparaison de $I(O, S)$ et de $I(G, S)$	75
6.4 Moments d'inertie par rapport à un point, une droite ou un axe	76
6.5 Utilisation de l'opérateur d'inertie	78
6.6 Exemples	80
6.6.1 Disque homogène	80
6.6.2 Cerceau homogène	81
6.6.3 Plaque plane rectangulaire homogène	82
6.6.4 Plaque plane elliptique homogène	83
6.6.5 Boule homogène	84
6.6.6 Demi-boule homogène	85
6.6.7 Sphère homogène	87
6.6.8 Cylindre plein homogène	87
6.6.9 Cylindre creux homogène	89
6.6.10 Cône de révolution homogène	90
<b>CHAPITRE 7 • PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE</b>	93
7.1 Efforts extérieurs à un système matériel	93
7.1.1 Description	93
7.1.2 Torseur d'efforts correspondants	95
7.2 Principe fondamental	98
7.3 Théorèmes généraux	99
7.3.1 Cas d'un point matériel	99
7.3.2 Théorème de la résultante dynamique	100
7.3.3 Théorème du moment dynamique	100
7.3.4 Cas particulier de la statique	102
7.3.5 Application au cas où $\Sigma$ est composé de plusieurs sous-systèmes	103

7.4 Repère principal	
7.4.1 Cas d'un point	
7.4.2 Cas d'un axe	
7.5 Densité d'inertie	
7.6 Les théorèmes	
7.6.1 Cas d'un point	
7.6.2 Cas d'un axe	
7.7 Repère principal	

**CHAPITRE 8 • MOUVEMENTS**

8.1 Puissance d'un effort	
8.2 Puissance d'un couple	
8.3 Liaison par un fil	
8.4 Liaison par un pivot	
8.5 Liaison crémaillère	
8.6 Contact ponctuel	
8.7 Liaisons usuelles	
8.7.1 Articulation	
8.7.2 Articulation	
8.7.3 Articulation	
8.7.4 Articulation	
8.7.5 Articulation	
8.8 Stratégie pour le mouvement	
8.9 Exercice	

**CHAPITRE 9 • THÉORÈMES**

9.1 Puissance du champ d'efforts	
9.2 Théorème de l'énergie cinétique	
9.3 Énoncé du théorème	
9.4 Intégrale première de l'énergie	
9.5 Système non conservatif	
9.6 Théorème de l'énergie cinétique	
9.7 Exercice	

71	7.4 Repères galiléens	104
71	7.4.1 Existence de plusieurs repères galiléens	104
73	7.4.2 Caractérisation des repères galiléens	105
75	7.5 Dérivée galiléenne d'un vecteur	106
76	7.6 Les théorèmes généraux en repères non galiléens	107
78	7.6.1 Cas d'un point matériel	107
80	7.6.2 Cas d'un système matériel	108
80	7.7 Repères galiléens approchés	110
80	<b>CHAPITRE 8 • MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES</b>	113
81	8.1 Puissance d'un torseur associé à une répartition vectorielle	114
82	8.2 Puissance totale des efforts de liaison entre deux solides $S_1$ et $S_2$	116
83	8.3 Liaison par l'intermédiaire d'un dispositif $d$ de masse négligeable	118
84	8.4 Liaison par un fil souple tendu inextensible de masse négligeable	119
85	8.5 Liaison créée par un ressort linéaire de masse négligeable	120
87	8.6 Contact ponctuel dissipatif ou non dissipatif	121
87	8.7 Liaisons usuelles parfaites	124
89	8.7.1 Articulation pivot parfaite d'axe $(O_1, \vec{k}_1)$	125
90	8.7.2 Articulation glissière parfaite d'axe $(O_1, \vec{k}_1)$	126
93	8.7.3 Articulation pivot glissant parfaite	127
93	8.7.4 Articulation sphérique parfaite de centre $O_1$	129
93	8.7.5 Articulation hélicoïdale parfaite d'axe $(O_1, \vec{k}_1)$ de pas $p$	130
93	8.8 Stratégie pour les équations du mouvement	131
95	8.9 Exercice	132
98	<b>CHAPITRE 9 • THÉORÈMES DE L'ÉNERGIE</b>	137
99	9.1 Puissance du champ de vitesse. Puissance du champ d'accélération	137
99	9.2 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en mouvement	139
100	9.3 Énoncé du théorème de l'énergie en terme de travail	140
100	9.4 Intégrale première de l'énergie. Système conservatif	140
102	9.5 Système non conservatif	141
103	9.6 Théorème de l'énergie pour un système matériel constitué de deux solides	142
	9.7 Exercice	143

CHAPITRE 10 • ÉQUILIBRE. STABILITÉ	145
10.1 Position d'équilibre d'un système	146
10.2 Position d'équilibre pour un système conservatif	148
10.3 Cas des mouvements stationnaires	149
10.4 Stabilité d'un équilibre pour un système conservatif	151
10.5 Mouvement stationnaire stable	152
10.6 Exemples d'études de stabilité	152
CHAPITRE 11 • INTRODUCTION AUX VIBRATIONS LINÉAIRES	155
11.1 Linéarisation des équations du mouvement	155
11.2 Exemple à un paramètre	156
11.3 Mise en forme des équations linéarisées	158
11.4 Étude des vibrations libres sans termes d'amortissement ( $C = 0$ )	159
11.5 Étude des vibrations forcées sans termes d'amortissement ( $C = 0$ )	163
11.6 Exercice	164
FORMULAIRE	167
A. Torseur $T$	167
B. Cinématique	168
C. Cinétique	169
D. Principe fondamental	171
E. Puissance d'un torseur engendré par un champ $\vec{\phi}$ défini sur $S$	171
F. Modélisation des efforts	172
G. Théorèmes d'énergie	175
INDEX	177

## 1.1 VECTEURS

L'espace de la mécanique est un espace vectoriel à  $\mathbb{R}^3$ .

L'espace des vecteurs est un espace vectoriel de dimension 3 noté  $E$ .

Le produit scalaire est défini par :

**Définition.** Une base orthonormale est une base de vecteurs unitaires ; nous la notons  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Convention. Nous adoptons :

1.  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$
2.  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$
3. les vecteurs  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sont dits *unitaires*.

SCIENCES SUP

Série Aide-mémoire

Lise Lamoureux • Danielle Fortuné

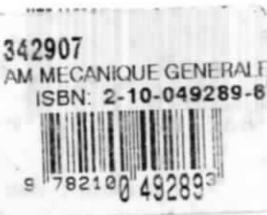
## AIDE-MÉMOIRE MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Cet ouvrage fournit les fondements indispensables à l'étude de la mécanique des solides et des systèmes de solides indéformables.

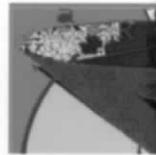
Il présente un cours synthétique, rigoureux, facile à consulter et qui constitue une base pour des études de mécanique. On y trouve des rappels ainsi que des notions de vocabulaire, les propositions, théorèmes et définitions essentiels et, pour finir, un formulaire récapitulatif. Cet aide-mémoire permet de modéliser, de mettre en équations et de résoudre les problèmes de mécanique.

Ce livre est destiné aux étudiants en licences scientifiques, en classes préparatoires aux écoles d'ingénieurs, ainsi qu'aux candidats au CAPES de physique-chimie.

1 <sup>er</sup> cycle	2 <sup>e</sup> cycle	3 <sup>e</sup> cycle
1	2	3
4	5	6
7	8	
LICENCE	MASTER	DOCTORAT



[www.dunod.com](http://www.dunod.com)



62

LISE LAMOUREUX  
est maître de conférences à  
l'Université Paris VI.

DANIELLE FORTUNÉ  
est maître de conférences à  
l'Université de Poitiers.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE



DUNOD