

SCIENCES SUP

*Aide-mémoire*

IUT • Licence • Master

# MÉCANIQUE DES STRUCTURES

## Résistance des matériaux



*Arnaud Delaplace  
Fabrice Gatuingt  
Frédéric Ragueneau*

DUNOD

# Table des matières

Chapitre 1 • THÉORIE DES POUTRES	1
1.1 Principes de base en résistance des matériaux	1
1.1.1 La notion de contrainte	1
1.1.2 La déformation	4
1.1.3 La loi de comportement	5
1.1.4 Définitions et hypothèses en mécanique des structures	6
1.1.5 Équations d'équilibre d'un élément de poutre	9
1.2 Études des poutres sous diverses sollicitations	10
1.2.1 Lois de comportement généralisées pour les poutres	10
1.2.2 Poutre en flexion simple	15
1.2.3 Poutre en flexion déviée	16
1.2.4 Poutre en flexion composée	16
Chapitre 2 • CARACTÉRISTIQUES DES SECTIONS	18
2.1 Préambule	18
2.2 Définitions	19
2.2.1 Surface	19
2.2.2 Centre de gravité	19
2.2.3 Moment statique	19
2.2.4 Moment d'inertie	20
2.2.5 Produit d'inertie	20
2.2.6 Moment polaire	21
2.2.7 Axes principaux d'inertie	21
2.2.8 Rayon de giration	21

2.3	Théorèmes et propriétés	22
2.3.1	Théorème de Huygens	22
2.3.2	Changement de repère	22
2.3.3	Décomposition d'une surface	23
2.4	Caractéristiques des principales sections	25
2.5	Exemple : caractéristiques d'une section en T	27
<b>Chapitre 3 • THÉORÈMES GÉNÉRAUX-MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES</b>		30
3.1	Principe des travaux virtuels – PTV	30
3.1.1	Champ de déplacement virtuel	31
3.1.2	Définition du travail des forces dans le champ de déplacement virtuel	31
3.2	Égalité de Clapeyron	32
3.3	Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti	33
3.4	Théorème de Castigliano	33
3.5	Théorème de Ménabréa	34
3.6	Théorème de Müller-Breslau : Formule de Mohr	34
3.7	Lignes d'influence	38
3.7.1	Effet d'un ensemble de charges	40
3.7.2	Lignes d'influence des déformations	40
<b>Chapitre 4 • SYSTÈMES ISOSTATIQUES</b>		41
4.1	Définitions	41
4.1.1	Systèmes isostatiques	41
4.1.2	Efforts et conditions de liaisons	42
4.1.3	Exemple	42
4.2	Poutre sur deux appuis	45
4.2.1	Cas d'une charge concentrée	45
4.2.2	Cas d'un convoi de charges ponctuelles : théorème de Barré	46
4.2.3	Cas d'une charge uniformément répartie	47
4.2.4	Cas d'une charge répartie partielle	48
4.2.5	Cas d'une charge répartie partielle proche d'un appui	49
4.2.6	Cas d'une charge triangulaire	50
4.2.7	Cas d'une charge triangulaire monotone	51
4.2.8	Cas d'une charge triangulaire anti symétrique	52
4.2.9	Cas d'une charge trapézoïdale symétrique	53
4.2.10	Cas d'une charge parabolique	54

4.2.11	Cas d'un couple en un point quelconque	55
4.2.12	Cas d'un couple à une extrémité	56
4.2.13	Cas d'un couple uniformément réparti	57
4.3	Poutre console	58
4.3.1	Cas d'une charge concentrée	58
4.3.2	Cas d'une charge uniformément répartie	59
4.3.3	Cas d'une charge triangulaire croissante	59
4.3.4	Cas d'une charge triangulaire décroissante	60
4.3.5	Cas d'un couple	61
4.4	Arc parabolique isostatique	62
4.4.1	Cas d'une charge uniformément répartie	62
4.4.2	Cas d'une charge ponctuelle horizontale	63
4.4.3	Cas d'une charge ponctuelle verticale	64
	<b>Chapitre 5 • SYSTÈMES HYPERSTATIQUES</b>	<b>65</b>
5.1	Généralités	65
5.1.1	Degré d'hyperstaticité H	65
5.1.2	Méthode des forces	68
5.1.3	Méthode des déplacements	75
5.2	Poutre droite à une travée	85
5.2.1	Encastrement élastique aux extrémités	85
5.2.2	Formulaire d'une poutre simplement appuyée d'un côté et encastrée de l'autre	87
5.2.3	Formulaire d'une poutre bi-encastrée	91
5.2.4	Formulaire d'une poutre console	94
5.3	Poutre continue	96
5.3.1	Notations et définitions	96
5.3.2	Poutre isostatique associée	96
5.3.3	Formule des trois moments	97
5.3.4	Expression des sollicitations et actions de liaison	98
5.3.5	Formulaire des rotations usuelles	99
5.3.6	Formulaire de la poutre continue à 2 travées égales	101
5.3.7	Formulaire de la poutre continue à 3 travées égales	103
5.3.8	Formulaire de la poutre continue à 4 travées égales	105
5.3.9	Formulaire de la poutre continue à 5 travées égales	106
5.3.10	Poutre continue sur appuis élastiques ponctuels	107

5.4	Systèmes de poutres croisées	101
5.4.1	Principe	101
5.4.2	Cas particulier des poutres de même inertie	101
5.4.3	Cas particulier des poutres infiniment rigides dans une direction	111
5.5	Poutre sur appui élastique continu	111
5.5.1	Définition et paramètres	111
5.5.2	Formulaire de la poutre infinie	112
5.5.3	Formulaire de la poutre semi-infinie	113
5.5.4	Formulaire de la poutre de longueur finie	114
5.6	Portique	114
5.6.1	Portique à un seul montant et à deux extrémités articulées	115
5.6.2	Portique à un seul montant et à deux extrémités encastées	115
5.6.3	Portique à un seul montant et à une extrémité encastée et l'autre articulée	121
5.6.4	Portique à deux montants articulés	122
5.6.5	Portique à deux montants encastés	123
5.7	Arcs hyperstatiques	125
5.7.1	Arc circulaire à deux articulations sans tirant	125
5.7.2	Arc parabolique à deux articulations sans tirant	127
Chapitre 6	• <b>PLAQUES ET COQUES</b>	129
6.1	Plaques	129
6.1.1	Formules générales	130
6.1.2	Méthode de résolution pour les plaques rectangulaires	131
6.1.3	Plaques rectangulaires	132
6.1.4	Plaques circulaires	134
6.1.5	Plaques annulaires	140
6.2	Coques	146
6.2.1	Cylindriques verticaux	146
6.2.2	Cylindres horizontaux remplis par un liquide	148
6.2.3	Coupole sphérique fermée	149
6.2.4	Coupole sphérique ouverte	151
6.2.5	Coque sphérique	153
Chapitre 7	• <b>FORMULATION DES ÉLÉMENTS FINIS</b>	154
7.1	Introduction	154

108	7.2	Principe des éléments finis	154
108	7.3	Étapes de la résolution d'un problème	156
109	7.4	Application à l'étude d'une poutre sollicitée en flexion	158
110	7.4.1	Description du problème	158
110	7.4.2	Construction de la matrice de raideur locale	158
110	7.4.3	Implantation et résolution dans Matlab	163
112	7.5	Éléments isoparamétriques	167
113	7.6	Fonctions de forme des éléments isoparamétriques courants	168
116	7.6.1	Élément barre à deux nœuds	168
118	7.6.2	Élément barre à trois nœuds	168
119	7.6.3	Élément triangulaire à trois nœuds	169
119	7.6.4	Élément triangulaire à six nœuds	169
120	7.6.5	Élément quadrangulaire à quatre nœuds	170
122	7.6.6	Élément quadrangulaire à huit nœuds	170
123	7.6.7	Élément quadrangulaire à neuf nœuds	171
125		<b>Chapitre 8 • INSTABILITÉ DES STRUCTURES</b>	172
125	8.1	Instabilité de poutres	172
127	8.1.1	Poutre d'Euler	172
129	8.1.2	Solutions générales des poutres comprimées	174
129	8.1.3	Solutions particulières pour des poutres de section constante	174
130	8.1.4	Prise en compte d'un défaut initial	177
131	8.2	Calcul des moments dans une poutre comprimée fléchie	178
132	8.3	Déversement latéral de poutres	179
134	8.3.1	Déversement latéral de poutres à section rectangulaire	179
140	8.3.2	Déversement latéral de poutres à section en I	180
146	8.4	Instabilité et voilement de plaques	181
146	8.5	Flambement de structures non planes initialement	184
148	8.5.1	Flambement d'arc et d'anneaux	184
149	8.5.2	Flambement de tubes minces	184
151		<b>Chapitre 9 • CALCUL NON-LINÉAIRE, ANALYSE LIMITE, PLASTICITÉ</b>	186
153	9.1	Introduction	186
154	9.2	Modèles de comportement des matériaux	187

9.3	Plastification en flexion : notion de moment plastique et rotule plastique	18
9.3.1	Hypothèses	18
9.3.2	Section symétrique	18
9.4	Analyse limite d'un système de poutres	19
9.4.1	Enjeux	19
9.4.2	Théorème statique	19
9.4.3	Théorème cinématique	19
<b>Chapitre 10 • DYNAMIQUE ET VIBRATIONS</b>		
10.1	Système à 1 degré de liberté	19
10.1.1	Équation du mouvement	19
10.1.2	Le régime libre	19
10.1.3	Le régime forcé sinusoïdal	19
10.1.4	Régime permanent sous une charge périodique quelconque	20
10.1.5	Réponse à une charge arbitraire	20
10.1.6	Réponse à des chargements impulsionnels simples	20
10.2	Système à $N$ degrés de liberté	20
10.2.1	Équations du mouvement	20
10.2.2	Signification des modes propres et fréquences propres	20
10.2.3	Détermination des fréquences propres de vibration	20
10.2.4	Détermination des modes propres de vibration	20
10.2.5	Propriété d'orthogonalité des modes	20
10.2.6	Normalisation des vecteurs modes de vibration	20
10.2.7	Équations modales du mouvement - Superposition des modes	20
10.3	Vibration des systèmes continus	21
10.3.1	Vibration axiale des barres	21
10.3.2	Vibration transversale des poutres	21
10.3.3	Détermination du mode fondamental de vibration : méthode de Rayleigh	21
10.3.4	Modes propres de vibration des poutres	21
10.3.5	Modes propres de vibration des plaques	21
<b>Index</b>		

L'objectif de ce premier chapitre est de poser les bases en mécanique des chapitres suivants, notamment ce qui est appelé Résistance des Matériaux.

## 1.1 PRINCIPES DE MÉCANIQUE DES MATÉRIAUX

### 1.1.1 La notion de contrainte

Si un solide est en équilibre sous l'action de forces extérieures, de couples et de liaisons, on introduit une méthode mathématique permettant de définir la notion de contrainte. Pour définir la notion de contrainte, on considère des coupures virtuelles du solide.

SCIENCES SUP

Série Aide-mémoire

Arnaud Delaplace  
Fabrice Gatuingt  
Frédéric Ragueneau

## MÉCANIQUE DES STRUCTURES

Cet aide-mémoire s'adresse aux étudiants en Licence et Master professionnels (génie des matériaux, génie civil...) ou en IUT de génie mécanique.

Il offre une approche moderne de la mécanique des structures en présentant les méthodes les plus récentes pour la résolution des systèmes mécaniques simples ou complexes, dont les dimensions vont du micromètre à quelques dizaines de mètres.

Au cours des chapitres de nombreux tableaux synthétisent et récapitulent les caractéristiques des principaux cas en résistance des matériaux.

ARNAUD DELAPLACE  
est chargé de recherche au CNRS, agrégé de Génie Civil.

FABRICE GATUINGT  
est maître de conférences à l'ENS Cachan, agrégé de Génie Civil.

FRÉDÉRIC RAGUENEAU  
est maître de conférences à l'ENS Cachan.

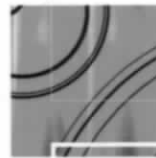
Tous trois sont chercheurs au Laboratoire de Mécanique et Technologie – LMT Cachan.



9 782100 521111

6665145  
ISBN 978-2-10-052111-1

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)



MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE



DUNOD