

*l'intégrale*

Jean-Marie Monier

# ALGÈBRE PCSI-PTSI

**NOUVELLE  
ÉDITION**

- ▶ Un cours conforme au programme
- ▶ Des exercices-types résolus
- ▶ Les méthodes à retenir
- ▶ De nombreux exercices et problèmes corrigés

**4<sup>e</sup> édition**

**DUNOD**

# Table des matières

## Cours

### CHAPITRE 1

### Vocabulaire de la théorie des ensembles

3

#### 1.1 Ensembles

4

1.1.1 Éléments de logique

4

1.1.2 Ensembles

6

1.1.3 Inclusion

6

1.1.4 Opérations dans  $\mathfrak{P}(E)$

7

#### 1.2 Relations

10

1.2.1 Généralités

10

1.2.2 Relations d'équivalence

15

1.2.3 Relations d'ordre

16

#### 1.3 Applications

19

1.3.1 Définitions

19

1.3.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

22

1.3.3 Restrictions et prolongements

25

1.3.4 Ordre et applications

26

1.3.5 Images directes, images réciproques de parties par une application

27

1.3.6 Familles

30

### CHAPITRE 2

### Structures algébriques

33

#### 2.1 Lois de composition interne

33

#### 2.2 Groupes

41

2.2.1 Généralités

41

2.2.2 Sous-groupes

43

2.2.3 Morphismes de groupes

46

#### 2.3 Anneaux

50

2.3.1 Définitions

50

2.3.2 Calculs dans un anneau

50

2.3.3 Anneaux intègres

54

#### 2.4 Corps

55

<b>CHAPITRE 3</b>	<b>Nombres entiers, nombres rationnels</b>	57
3.1	<b>Propriétés de <math>\mathbb{N}</math></b>	58
3.1.1	Structure de $\mathbb{N}$	58
3.1.2	Le principe de récurrence	58
3.1.3	Divisibilité dans $\mathbb{N}$	59
3.2	<b>Ensembles finis, ensembles infinis</b>	62
3.2.1	Equipotence	62
3.2.2	Ensembles finis	63
3.2.3	Ensembles infinis	66
3.3	<b>Analyse combinatoire</b>	67
3.3.1	Permutations	67
3.3.2	Arrangements	67
3.3.3	Combinaisons	68
3.4	<b>Dénombrements</b>	73
3.4.1	Dénombrements classiques	73
3.4.2	Exemples de dénombrements	73
3.5	<b>Propriétés de <math>\mathbb{Z}</math></b>	75
3.6	<b>Propriétés de <math>\mathbb{Q}</math></b>	76
<b>CHAPITRE 4</b>	<b>Arithmétique dans <math>\mathbb{Z}</math></b>	79
4.1	<b>Divisibilité</b>	80
4.2	<b>Nombres premiers</b>	83
<b>CHAPITRE 5</b>	<b>Polynômes, fractions rationnelles</b>	87
5.1	<b>Algèbre <math>K[X]</math></b>	88
5.1.1	Définition	88
5.1.2	Addition	89
5.1.3	Multiplication	90
5.1.4	Loi externe	92
5.1.5	Composition	92
5.1.6	Dérivation	94
5.1.7	Fonctions polynomiales	95
5.1.8	Notion de polynôme à plusieurs indéterminées	95
5.2	<b>Arithmétique dans <math>K[X]</math></b>	100
5.2.1	Divisibilité	100
5.2.2	Division euclidienne	100
5.2.3	Polynômes irréductibles	100
5.3	<b>Zéros des polynômes</b>	100
5.3.1	Généralités	100

	5.3.2	Polynômes scindés	107
	5.3.3	Utilisation de la dérivation	111
	5.3.4	Cas de $\mathbb{C}[X]$	112
	5.3.5	Cas de $\mathbb{R}[X]$	114
	<b>5.4</b>	<b>Fractions rationnelles</b>	118
	5.4.1	Étude de $K(X)$	118
	5.4.2	Décomposition en éléments simples	123
<b>CHAPITRE 6</b>		<b>Espaces vectoriels</b>	133
	<b>6.1</b>	<b>Structure d'espace vectoriel</b>	134
	<b>6.2</b>	<b>Sous-espaces vectoriels</b>	136
	<b>6.3</b>	<b>Dépendance et indépendance linéaires</b>	141
	6.3.1	Familles liées, familles libres	141
	6.3.2	Sous-espace engendré par une partie	144
	6.3.3	Familles génératrices, bases	146
	<b>6.4</b>	<b>Théorie de la dimension</b>	147
<b>CHAPITRE 7</b>		<b>Applications linéaires</b>	157
	<b>7.1</b>	<b>Généralités</b>	158
	7.1.1	Définitions	158
	7.1.2	Noyau, image	161
	7.1.3	Applications linéaires et familles de vecteurs	162
	<b>7.2</b>	<b>Opérations sur les applications linéaires</b>	167
	7.2.1	L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$	167
	7.2.2	Composition	167
	7.2.3	Le groupe $\mathcal{GL}(E)$	171
	<b>7.3</b>	<b>Cas de la dimension finie</b>	174
	7.3.1	Le théorème du rang et ses conséquences	174
	7.3.2	Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$	177
<b>CHAPITRE 8</b>		<b>Matrices</b>	181
	<b>8.1</b>	<b>Calcul matriciel</b>	182
	8.1.1	Notion de matrice	182
	8.1.2	Matrices et applications linéaires	183
	8.1.3	L'espace vectoriel $\mathbf{M}_{n,p}(K)$	184
	8.1.4	Multiplication des matrices	185
	8.1.5	Le groupe $\mathbf{GL}_n(K)$	191
	8.1.6	Rang d'une matrice	194
	8.1.7	Opérations élémentaires	196
	8.1.8	Transposition	200
	8.1.9	Trace d'une matrice carrée	201

<b>8.2</b>	<b>Changement de bases</b>	202
8.2.1	Matrices de passage	202
8.2.2	Changement de base pour un vecteur	203
8.2.3	Changement de bases pour une application linéaire	204
8.2.4	Changement de base pour un endomorphisme	207

<b>8.3</b>	<b>Matrices remarquables</b>	209
8.3.1	Matrices symétriques, matrices antisymétriques	209
8.3.2	Matrices triangulaires	211
8.3.3	Matrices diagonales	215

**CHAPITRE 9**

**Déterminants, systèmes linéaires** 217

<b>9.1</b>	<b>Déterminant d'une famille de <math>n</math> vecteurs dans une base d'un ev de dimension <math>n</math>, <math>n = 2</math> ou <math>n = 3</math></b>	218
------------	---	-----

9.1.1	Cas $n = 2$	218
9.1.2	Cas $n = 3$	220

<b>9.2</b>	<b>Déterminant d'une matrice carrée</b>	221
------------	---	-----

<b>9.3</b>	<b>Déterminant d'un endomorphisme</b>	222
------------	---------------------------------------	-----

<b>9.4</b>	<b>Calcul pratique des déterminants</b>	223
------------	---	-----

<b>9.5</b>	<b>Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension 2 ou 3</b>	224
------------	---	-----

<b>9.6</b>	<b>Systèmes affines</b>	225
9.6.1	Position du problème	225
9.6.2	Résolution	226

**CHAPITRE 10**

**Espaces vectoriels euclidiens**

**10.1 Produit scalaire**

10.1.1	Généralités
10.1.2	Inégalités, normes euclidiennes
10.1.3	Orthogonalité

**10.2 Espaces vectoriels euclidiens**

10.2.1	Procédé d'orthogonalisation de Schmidt
10.2.2	Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales
10.2.3	Hyperplans

**10.3 Groupe orthogonal**

10.3.1	Endomorphismes orthogonaux
10.3.2	Matrices orthogonales

10.4	Géométrie vectorielle euclidienne plane	260
10.5	Géométrie vectorielle euclidienne en dimension 3	265
10.5.1	Endomorphismes orthogonaux de $E_3$	265
10.5.2	Produit vectoriel	273

## Solutions des exercices

Chapitre 1	282
Chapitre 2	287
Chapitre 3	293
Chapitre 4	299
Chapitre 5	303
Chapitre 6	316
Chapitre 7	320
Chapitre 8	325
Chapitre 9	334
Chapitre 10	336
Index des notations	347
Index alphabétique	349

Jean-Marie Monier

4<sup>e</sup> édition

# ALGÈBRE PCSI-PTSI

## Cours, méthodes et exercices corrigés

Cette 4<sup>e</sup> édition du cours d'Algèbre de Jean-Marie Monier a été **entièrement revue afin de répondre aux besoins des étudiants** de classes préparatoires :

Un cours complet, pédagogique et conforme au programme.

- Toutes les notions du **programme**.
- Des commentaires dans la marge pour mieux comprendre le cours, présenter les difficultés, mettre en avant les résultats importants.
- Les « **méthodes à retenir** ».

De nombreux exercices, accessibles, à difficulté progressive et tous corrigés.

- Des exercices-types avec solution commentée pour **maîtriser les techniques incontournables**.
- Des **exercices classés par niveau de difficulté** et tous résolus pour s'entraîner.
- Des **problèmes résolus**, en fin de chapitre, pour aller plus loin.

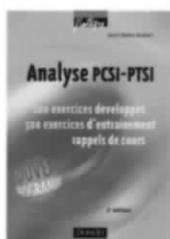
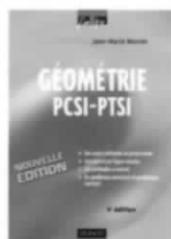
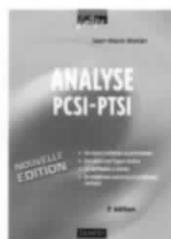
Une nouvelle maquette structure le contenu pour en faciliter la lecture et assurer un accompagnement pédagogique optimum.

JEAN-MARIE MONIER  
est professeur en classe  
de Spéciales au lycée  
La Martinière-Monplaisir  
à Lyon.

Dans la série Monier, sont également disponibles :

Les cours

Les exercices



6492854

ISBN 978-2-10-050844-0

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

