

l'intègre

Sous la direction de
Christian Gautier
André Warusfel
Bruno Caminade
Serge Nicolas

Mathématiques

TOUT-EN-UN · ECS 2^e année

Cours, exercices
et problèmes

NOUVEAU
PROGRAMME

PRÉPAS
COMMERCIALES



Compléments
sur le web

DUNOD

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Preface | xi |
| 1 Compléments d'algèbre linéaire | 1 |
| 1. Somme directe de sous-espaces, sous-espaces stables | 1 |
| 1.1 Somme directe de deux sous-espaces | 1 |
| 1.2 Somme directe de n sous-espaces | 4 |
| 1.3 Sous-espaces stables | 6 |
| 2. Réduction des endomorphismes | 7 |
| 2.1 Éléments propres | 7 |
| 2.2 Polynôme d'un endomorphisme | 9 |
| 2.3 Endomorphismes diagonalisables | 11 |
| 3. Réduction d'une matrice | 12 |
| 3.1 Similitude | 12 |
| 3.2 Éléments propres | 12 |
| 3.3 Polynôme d'une matrice | 16 |
| 3.4 Matrices diagonalisables | 18 |
| 2 Algèbre bilinéaire | 28 |
| 1. Produit scalaire | 28 |
| 1.1 Produit scalaire | 28 |
| 1.2 Norme euclidienne | 31 |
| 1.3 Orthogonalité | 33 |
| 2. Espaces euclidiens | 40 |
| 2.1 Premières propriétés | 40 |
| 2.2 Supplémentaire orthogonal | 44 |
| 2.3 Projection orthogonale | 45 |
| 2.4 Problèmes de moindres carrés | 47 |
| 3. Endomorphismes symétriques | 48 |
| 3.1 Premières propriétés | 48 |
| 3.2 Réduction d'un endomorphisme symétrique | 49 |
| 3.3 Réduction d'une matrice symétrique | 51 |
| 3.4 Forme quadratique sur \mathbb{R}^n | 52 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3 | Intégration sur un intervalle quelconque | 69 |
| 1. | Définitions | 69 |
| 1.1 | Intégration sur un intervalle semi-ouvert | 69 |
| 1.2 | Intégrale d'une fonction sur un intervalle ouvert | 72 |
| 1.3 | Un exemple fondamental : les intégrales de Riemann | 75 |
| 2. | Propriétés des intégrales convergentes | 75 |
| 2.1 | Linéarité | 75 |
| 2.2 | Relation de Chasles | 77 |
| 2.3 | Positivité | 77 |
| 2.4 | Intégration par parties | 79 |
| 2.5 | Changement de variable | 81 |
| 3. | Cas des fonctions positives | 83 |
| 3.1 | Condition nécessaire et suffisante de convergence | 83 |
| 3.2 | Critère de comparaison | 83 |
| 3.3 | Équivalence et convergence | 84 |
| 3.4 | Négligeabilité et convergence | 84 |
| 3.5 | Fonction Γ | 86 |
| 3.6 | Comparaison série-intégrale | 87 |
| 4. | Cas des fonctions de signe quelconque | 90 |
| 4.1 | Convergence absolue | 90 |
| 4.2 | Semi-convergence | 91 |
| | | |
| 4 | Éléments de topologie de \mathbb{R}^n | 112 |
| 1. | Rappels sur \mathbb{R}^n | 112 |
| 1.1 | Droites et segments de \mathbb{R}^n | 112 |
| 1.2 | Hyperplan affine | 113 |
| 2. | Distance euclidienne | 115 |
| 2.1 | Structure euclidienne de \mathbb{R}^n | 115 |
| 2.2 | Distance euclidienne | 116 |
| 2.3 | Boules | 117 |
| 2.4 | Parties bornées | 118 |
| 3. | Ouverts et fermés | 119 |
| 3.1 | Parties ouvertes | 119 |
| 3.2 | Parties fermées | 121 |
| 4. | Parties convexes | 123 |
| | | |
| 5 | Fonctions de n variables – Continuité | 132 |
| 1. | Graphe d'une fonction | 132 |
| 2. | Continuité d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} | 136 |
| 3. | Opérations sur les fonctions continues | 140 |
| 4. | Propriétés des fonctions continues | 145 |

6 Fonctions

1. Calcul

2. Continuité

3. Dérivées

4. Intégrales

5. Fonctions spéciales

6. Fonctions complexes

7. Fonctions vectorielles

8. Fonctions de plusieurs variables

9. Fonctions de plusieurs variables

10. Fonctions de plusieurs variables

11. Fonctions de plusieurs variables

12. Fonctions de plusieurs variables

13. Fonctions de plusieurs variables

14. Fonctions de plusieurs variables

15. Fonctions de plusieurs variables

16. Fonctions de plusieurs variables

17. Fonctions de plusieurs variables

18. Fonctions de plusieurs variables

19. Fonctions de plusieurs variables

20. Fonctions de plusieurs variables

21. Fonctions de plusieurs variables

22. Fonctions de plusieurs variables

23. Fonctions de plusieurs variables

24. Fonctions de plusieurs variables

25. Fonctions de plusieurs variables

26. Fonctions de plusieurs variables

27. Fonctions de plusieurs variables

28. Fonctions de plusieurs variables

29. Fonctions de plusieurs variables

30. Fonctions de plusieurs variables

31. Fonctions de plusieurs variables

32. Fonctions de plusieurs variables

33. Fonctions de plusieurs variables

34. Fonctions de plusieurs variables

35. Fonctions de plusieurs variables

36. Fonctions de plusieurs variables

37. Fonctions de plusieurs variables

38. Fonctions de plusieurs variables

39. Fonctions de plusieurs variables

40. Fonctions de plusieurs variables

41. Fonctions de plusieurs variables

42. Fonctions de plusieurs variables

43. Fonctions de plusieurs variables

44. Fonctions de plusieurs variables

45. Fonctions de plusieurs variables

46. Fonctions de plusieurs variables

47. Fonctions de plusieurs variables

48. Fonctions de plusieurs variables

49. Fonctions de plusieurs variables

50. Fonctions de plusieurs variables

51. Fonctions de plusieurs variables

52. Fonctions de plusieurs variables

53. Fonctions de plusieurs variables

54. Fonctions de plusieurs variables

55. Fonctions de plusieurs variables

56. Fonctions de plusieurs variables

57. Fonctions de plusieurs variables

58. Fonctions de plusieurs variables

59. Fonctions de plusieurs variables

| | |
|--|------------|
| 6 Fonctions de n variables : calcul différentiel | 159 |
| 1. Calcul différentiel d'ordre 1 | 159 |
| 1.1 Dérivées partielles d'ordre 1 | 159 |
| 1.2 Fonctions de classe C^1 | 165 |
| 2. Calcul différentiel d'ordre 2 | 170 |
| 2.1 Dérivées partielles d'ordre 2 | 170 |
| 2.2 Fonctions de classe C^2 | 170 |
| 2.3 Étude locale des fonctions de classe C^2 | 176 |
| | |
| 7 Extremums | 189 |
| 1. Extremums sur un ouvert | 189 |
| 1.1 Définitions | 189 |
| 1.2 Condition nécessaire du premier ordre | 190 |
| 1.3 Conditions du second ordre | 193 |
| 1.4 Cas $n = 2$ | 196 |
| 1.5 Extremums globaux | 199 |
| 1.6 Position du graphe par rapport à l'hyperplan tangent | 201 |
| 2. Extremums sous contrainte d'égalités linéaires | 203 |
| 2.1 Définitions | 203 |
| 2.2 Points critiques sous contrainte | 203 |
| | |
| 8 Variables aléatoires réelles discrètes | 219 |
| 1. Généralités sur les variables aléatoires réelles | 219 |
| 1.1 Indépendance de variables aléatoires réelles | 220 |
| 1.2 Fonctions de répartition | 222 |
| 1.3 Le théorème fondamental d'existence | 223 |
| 1.4 Espérance et variance des variables aléatoires réelles | 226 |
| 2. Séries doubles convergentes | 228 |
| 2.1 Suites et séries doubles | 228 |
| 2.2 Sommation par paquets | 228 |
| 3. Indépendance de variables aléatoires réelles discrètes | 235 |
| 4. Espérance et conditionnement des variables discrètes | 236 |
| 4.1 Espérance et variance | 236 |
| 4.2 Espérance conditionnelle | 241 |
| 4.3 Formule de l'espérance totale | 242 |
| | |
| 9 Vecteurs aléatoires discrets | 280 |
| 1. Couples de variables aléatoires réelles discrètes | 280 |
| 1.1 Généralités | 280 |
| 1.2 Loi conjointe et lois marginales | 282 |
| 1.3 Lois conditionnelles | 285 |
| 1.4 Indépendance, généralités | 289 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 2. | Variable aléatoire fonction d'un vecteur discret | 290 |
| 2.1 | Généralités | 290 |
| 2.2 | Somme de deux variables aléatoires réelles discrètes | 291 |
| 2.3 | Espérance d'une fonction d'un vecteur aléatoire discret | 292 |
| 2.4 | Croissance de l'espérance | 293 |
| 2.5 | Variance d'une somme, covariance | 295 |
| 2.6 | Propriétés de la covariance | 296 |
| 2.7 | Corrélation linéaire | 298 |
| 2.8 | Régression | 299 |
| 3. | Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans \mathbb{R}^n | 301 |
| 3.1 | Généralités | 301 |
| 3.2 | Loi conjointe et lois marginales | 302 |
| 3.3 | Indépendance | 304 |
| 3.4 | Variables aléatoires fonctions d'un vecteur aléatoire discret | 306 |
| 3.5 | Combinaisons linéaires de variables aléatoires réelles discrètes | 308 |
| 3.6 | L'exemple de la loi multinomiale | 311 |
| 3.7 | Remarque | 314 |
| 10 | Variables aléatoires réelles à densité | 327 |
| 1. | Définition des variables aléatoires réelles à densité | 327 |
| 1.1 | Fonctions de répartition et densités | 327 |
| 1.2 | Premier théorème de transfert | 332 |
| 1.3 | Somme de deux variables indépendantes à densité | 334 |
| 2. | Moments d'une variable aléatoire à densité | 336 |
| 2.1 | Espérance mathématique | 337 |
| 2.2 | Second théorème de transfert | 339 |
| 2.3 | Variance et écart-type | 341 |
| 2.4 | Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev | 345 |
| 2.5 | Variable centrée réduite associée à une variable à densité | 346 |
| 3. | Les lois usuelles | 346 |
| 3.1 | La loi uniforme | 346 |
| 3.2 | La loi exponentielle | 349 |
| 3.3 | Les lois gamma | 353 |
| 3.4 | La loi de Laplace | 359 |
| 3.5 | La loi de Cauchy | 362 |
| 3.6 | La loi normale de Laplace-Gauss | 363 |
| 3.7 | Théorèmes de stabilité par rapport à l'addition | 368 |
| 11 | Convergences | 383 |
| 1. | Convergence en probabilité | 384 |
| 1.1 | Analyse du problème | 384 |
| 1.2 | Définition | 385 |
| 1.3 | Exercice corrigé | 387 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 1.4 | Problème de l'unicité de la limite | 388 |
| 1.5 | Composition par une fonction continue | 389 |
| 1.6 | Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev | 391 |
| 1.7 | Conditions suffisantes de convergence en probabilité | 393 |
| 1.8 | Exercices corrigés | 394 |
| 2. | Lois des grands nombres | 396 |
| 2.1 | Loi faible des grands nombres | 396 |
| 2.2 | Théorème de Bernoulli | 397 |
| 2.3 | Exercice corrigé | 398 |
| 3. | Convergence en loi | 399 |
| 3.1 | Définition | 399 |
| 3.2 | Conditions suffisantes pour une convergence en loi | 403 |
| 3.3 | Rapports avec la convergence en probabilité | 408 |
| 3.4 | Exercice corrigé | 410 |
| 4. | Convergence en loi et approximations classiques | 411 |
| 4.1 | Théorème de la limite centrée | 411 |
| 4.2 | Convergence de la loi hypergéométrique | 412 |
| 4.3 | Approximations de la loi binomiale | 413 |
| 4.4 | Approximation de la loi de Poisson | 415 |
| 12 | Estimation | 429 |
| 1. | Échantillons d'une loi de probabilité | 430 |
| 1.1 | Définitions | 430 |
| 1.2 | Statistiques sur un échantillon | 431 |
| 1.3 | Statistiques empiriques | 431 |
| 1.4 | Simulation de variables aléatoires réelles | 435 |
| 2. | Estimateurs | 439 |
| 2.1 | Position du problème | 439 |
| 2.2 | Définitions | 440 |
| 2.3 | Biais d'un estimateur | 442 |
| 2.4 | Risque quadratique d'un estimateur | 444 |
| 3. | Suites d'estimateurs | 446 |
| 3.1 | Généralités | 446 |
| 3.2 | Convergence et risque quadratique | 446 |
| 3.3 | Image par une fonction continue | 449 |
| 4. | Estimation par intervalles de confiance | 450 |
| 4.1 | Première approche | 450 |
| 4.2 | Intervalles de dispersion | 451 |
| 4.3 | Construction d'intervalles de confiance | 457 |
| 4.4 | Exemples | 458 |
| 4.5 | Perspectives | 461 |
| 5. | Statistiques bivariées | 462 |
| 5.1 | Présentation des données | 462 |
| 5.2 | Corrélation et droites des moindres carrés | 466 |

| | |
|---|------------|
| 13 Interventions informatiques | 489 |
| 1. Récursivité | 489 |
| 1.1 Factorielle | 491 |
| 1.2 Résolution dichotomique d'une équation | 493 |
| 1.3 Exponentiation rapide | 495 |
| 1.4 Suite de Fibonacci | 497 |
| 1.5 Coefficients du binôme | 501 |
| 2. Gestion de listes à une dimension | 506 |
| 2.1 Recherche d'éléments extrémaux | 506 |
| 2.2 Tri par insertion et tri rapide | 509 |
| 2.3 Recherche d'un élément dans une liste | 512 |
| 3. Simulations de lois réelles discrètes | 515 |
| 3.1 Loi uniforme discrète | 517 |
| 3.2 Loi de Bernoulli | 519 |
| 3.3 Loi binomiale | 520 |
| 3.4 Loi géométrique | 521 |
| 3.5 Loi binomiale négative (de Pascal) | 522 |
| 3.6 Loi hypergéométrique | 523 |
| 3.7 Loi de Poisson | 526 |
| 4. Simulations de lois réelles à densité | 528 |
| 4.1 Loi uniforme à densité | 528 |
| 4.2 Loi exponentielle | 531 |
| 4.3 Loi de Cauchy | 532 |
| 4.4 Loi de Laplace | 534 |
| 4.5 Loi gamma | 535 |
| 4.6 Loi normale (de Laplace-Gauss) | 537 |
| 5. Estimation | 540 |
| 5.1 Estimation d'un nombre inconnu | 541 |
| 5.2 Estimation d'un intervalle inconnu | 542 |
| 5.3 Intervalles de confiance pour un nombre inconnu | 543 |
| 5.4 Intervalles de confiance pour l'espérance d'une loi normale | 546 |
| Tables des lois usuelles | 548 |
| Index | 554 |

Sous la direction de Christian Gautier et André Warusfel
Bruno Caminade • Serge Nicolas

MATHÉMATIQUES TOUT-EN-UN • ECS 2^e ANNÉE

Cours, exercices et problèmes

Cet ouvrage couvre en un seul volume la totalité des programmes de mathématiques de la 2^e année des classes préparatoires économiques et commerciales. Il concerne principalement la filière scientifique, mais pourra être également utilisé avec profit par les élèves de la filière économique, ainsi que par les élèves des classes préparatoires BCPST et B/L.

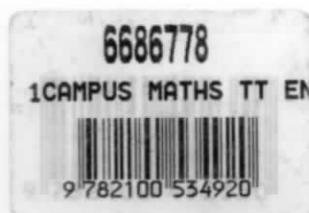
Conçu comme un ouvrage de référence, ce livre propose à son lecteur une vision globale du cours dans le strict respect des programmes. Il se compose de 13 chapitres s'articulant autour de quatre grands thèmes :

- Algèbre linéaire et bilinéaire
- Analyse
- Probabilités et Statistique
- Informatique

De nombreux exercices et problèmes complètent le cours, ce qui permet au futur candidat de s'entraîner efficacement dans l'optique des concours. **Les corrigés détaillés sont tous disponibles en ligne sur Internet, dans la rubrique « Compléments en ligne » associée à cet ouvrage sur le site www.dunod.com.**

CHRISTIAN GAUTIER
ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud, est professeur au lycée La Bruyère à Versailles.

ANDRÉ WARUSFEL
ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, a été professeur de Mathématiques Spéciales au lycée Louis-le-Grand à Paris et Inspecteur général de mathématiques.



ISBN 2 10 049235 7

www.dunod.com

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

