

l'intègre

Sous la direction de
Christian Gautier
André Warusfel
Bruno Caminade
Serge Nicolas

Mathématiques

TOUT-EN-UN · ECS 2^e année

Cours, exercices
et problèmes

NOUVEAU
PROGRAMME

PRÉPAS
COMMERCIALES



Compléments
sur le web

DUNOD

Table des matières

Preface	xi
1 Compléments d'algèbre linéaire	1
1. Somme directe de sous-espaces, sous-espaces stables	1
1.1 Somme directe de deux sous-espaces	1
1.2 Somme directe de n sous-espaces	4
1.3 Sous-espaces stables	6
2. Réduction des endomorphismes	7
2.1 Éléments propres	7
2.2 Polynôme d'un endomorphisme	9
2.3 Endomorphismes diagonalisables	11
3. Réduction d'une matrice	12
3.1 Similitude	12
3.2 Éléments propres	12
3.3 Polynôme d'une matrice	16
3.4 Matrices diagonalisables	18
2 Algèbre bilinéaire	28
1. Produit scalaire	28
1.1 Produit scalaire	28
1.2 Norme euclidienne	31
1.3 Orthogonalité	33
2. Espaces euclidiens	40
2.1 Premières propriétés	40
2.2 Supplémentaire orthogonal	44
2.3 Projection orthogonale	45
2.4 Problèmes de moindres carrés	47
3. Endomorphismes symétriques	48
3.1 Premières propriétés	48
3.2 Réduction d'un endomorphisme symétrique	49
3.3 Réduction d'une matrice symétrique	51
3.4 Forme quadratique sur \mathbb{R}^n	52

3	Intégration sur un intervalle quelconque	69
1.	Définitions	69
1.1	Intégration sur un intervalle semi-ouvert	69
1.2	Intégrale d'une fonction sur un intervalle ouvert	72
1.3	Un exemple fondamental : les intégrales de Riemann	75
2.	Propriétés des intégrales convergentes	75
2.1	Linéarité	75
2.2	Relation de Chasles	77
2.3	Positivité	77
2.4	Intégration par parties	79
2.5	Changement de variable	81
3.	Cas des fonctions positives	83
3.1	Condition nécessaire et suffisante de convergence	83
3.2	Critère de comparaison	83
3.3	Équivalence et convergence	84
3.4	Négligeabilité et convergence	84
3.5	Fonction Γ	86
3.6	Comparaison série-intégrale	87
4.	Cas des fonctions de signe quelconque	90
4.1	Convergence absolue	90
4.2	Semi-convergence	91
4	Éléments de topologie de \mathbb{R}^n	112
1.	Rappels sur \mathbb{R}^n	112
1.1	Droites et segments de \mathbb{R}^n	112
1.2	Hyperplan affine	113
2.	Distance euclidienne	115
2.1	Structure euclidienne de \mathbb{R}^n	115
2.2	Distance euclidienne	116
2.3	Boules	117
2.4	Parties bornées	118
3.	Ouverts et fermés	119
3.1	Parties ouvertes	119
3.2	Parties fermées	121
4.	Parties convexes	123
5	Fonctions de n variables – Continuité	132
1.	Graphe d'une fonction	132
2.	Continuité d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}	136
3.	Opérations sur les fonctions continues	140
4.	Propriétés des fonctions continues	145

6 Fonctions

1. Calcul

2. Calcul

3. Calcul

4. Calcul

5. Calcul

6. Calcul

7. Calcul

7 Exercices

1. Exercices

2. Exercices

3. Exercices

4. Exercices

5. Exercices

6. Exercices

7. Exercices

8. Exercices

9. Exercices

10. Exercices

8 Tableaux

1. Tableaux

2. Tableaux

3. Tableaux

4. Tableaux

5. Tableaux

6. Tableaux

7. Tableaux

8. Tableaux

9. Tableaux

10. Tableaux

6 Fonctions de n variables : calcul différentiel	159
1. Calcul différentiel d'ordre 1	159
1.1 Dérivées partielles d'ordre 1	159
1.2 Fonctions de classe C^1	165
2. Calcul différentiel d'ordre 2	170
2.1 Dérivées partielles d'ordre 2	170
2.2 Fonctions de classe C^2	170
2.3 Étude locale des fonctions de classe C^2	176
7 Extremums	189
1. Extremums sur un ouvert	189
1.1 Définitions	189
1.2 Condition nécessaire du premier ordre	190
1.3 Conditions du second ordre	193
1.4 Cas $n = 2$	196
1.5 Extremums globaux	199
1.6 Position du graphe par rapport à l'hyperplan tangent	201
2. Extremums sous contrainte d'égalités linéaires	203
2.1 Définitions	203
2.2 Points critiques sous contrainte	203
8 Variables aléatoires réelles discrètes	219
1. Généralités sur les variables aléatoires réelles	219
1.1 Indépendance de variables aléatoires réelles	220
1.2 Fonctions de répartition	222
1.3 Le théorème fondamental d'existence	223
1.4 Espérance et variance des variables aléatoires réelles	226
2. Séries doubles convergentes	228
2.1 Suites et séries doubles	228
2.2 Sommation par paquets	228
3. Indépendance de variables aléatoires réelles discrètes	235
4. Espérance et conditionnement des variables discrètes	236
4.1 Espérance et variance	236
4.2 Espérance conditionnelle	241
4.3 Formule de l'espérance totale	242
9 Vecteurs aléatoires discrets	280
1. Couples de variables aléatoires réelles discrètes	280
1.1 Généralités	280
1.2 Loi conjointe et lois marginales	282
1.3 Lois conditionnelles	285
1.4 Indépendance, généralités	289

2.	Variable aléatoire fonction d'un vecteur discret	290
2.1	Généralités	290
2.2	Somme de deux variables aléatoires réelles discrètes	291
2.3	Espérance d'une fonction d'un vecteur aléatoire discret	292
2.4	Croissance de l'espérance	293
2.5	Variance d'une somme, covariance	295
2.6	Propriétés de la covariance	296
2.7	Corrélation linéaire	298
2.8	Régression	299
3.	Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans \mathbb{R}^n	301
3.1	Généralités	301
3.2	Loi conjointe et lois marginales	302
3.3	Indépendance	304
3.4	Variables aléatoires fonctions d'un vecteur aléatoire discret	306
3.5	Combinaisons linéaires de variables aléatoires réelles discrètes	308
3.6	L'exemple de la loi multinomiale	311
3.7	Remarque	314
10	Variables aléatoires réelles à densité	327
1.	Définition des variables aléatoires réelles à densité	327
1.1	Fonctions de répartition et densités	327
1.2	Premier théorème de transfert	332
1.3	Somme de deux variables indépendantes à densité	334
2.	Moments d'une variable aléatoire à densité	336
2.1	Espérance mathématique	337
2.2	Second théorème de transfert	339
2.3	Variance et écart-type	341
2.4	Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev	345
2.5	Variable centrée réduite associée à une variable à densité	346
3.	Les lois usuelles	346
3.1	La loi uniforme	346
3.2	La loi exponentielle	349
3.3	Les lois gamma	353
3.4	La loi de Laplace	359
3.5	La loi de Cauchy	362
3.6	La loi normale de Laplace-Gauss	363
3.7	Théorèmes de stabilité par rapport à l'addition	368
11	Convergences	383
1.	Convergence en probabilité	384
1.1	Analyse du problème	384
1.2	Définition	385
1.3	Exercice corrigé	387

1.4	Problème de l'unicité de la limite	388
1.5	Composition par une fonction continue	389
1.6	Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev	391
1.7	Conditions suffisantes de convergence en probabilité	393
1.8	Exercices corrigés	394
2.	Lois des grands nombres	396
2.1	Loi faible des grands nombres	396
2.2	Théorème de Bernoulli	397
2.3	Exercice corrigé	398
3.	Convergence en loi	399
3.1	Définition	399
3.2	Conditions suffisantes pour une convergence en loi	403
3.3	Rapports avec la convergence en probabilité	408
3.4	Exercice corrigé	410
4.	Convergence en loi et approximations classiques	411
4.1	Théorème de la limite centrée	411
4.2	Convergence de la loi hypergéométrique	412
4.3	Approximations de la loi binomiale	413
4.4	Approximation de la loi de Poisson	415
12	Estimation	429
1.	Échantillons d'une loi de probabilité	430
1.1	Définitions	430
1.2	Statistiques sur un échantillon	431
1.3	Statistiques empiriques	431
1.4	Simulation de variables aléatoires réelles	435
2.	Estimateurs	439
2.1	Position du problème	439
2.2	Définitions	440
2.3	Biais d'un estimateur	442
2.4	Risque quadratique d'un estimateur	444
3.	Suites d'estimateurs	446
3.1	Généralités	446
3.2	Convergence et risque quadratique	446
3.3	Image par une fonction continue	449
4.	Estimation par intervalles de confiance	450
4.1	Première approche	450
4.2	Intervalles de dispersion	451
4.3	Construction d'intervalles de confiance	457
4.4	Exemples	458
4.5	Perspectives	461
5.	Statistiques bivariées	462
5.1	Présentation des données	462
5.2	Corrélation et droites des moindres carrés	466

13 Interventions informatiques	489
1. Récursivité	489
1.1 Factorielle	491
1.2 Résolution dichotomique d'une équation	493
1.3 Exponentiation rapide	495
1.4 Suite de Fibonacci	497
1.5 Coefficients du binôme	501
2. Gestion de listes à une dimension	506
2.1 Recherche d'éléments extrémaux	506
2.2 Tri par insertion et tri rapide	509
2.3 Recherche d'un élément dans une liste	512
3. Simulations de lois réelles discrètes	515
3.1 Loi uniforme discrète	517
3.2 Loi de Bernoulli	519
3.3 Loi binomiale	520
3.4 Loi géométrique	521
3.5 Loi binomiale négative (de Pascal)	522
3.6 Loi hypergéométrique	523
3.7 Loi de Poisson	526
4. Simulations de lois réelles à densité	528
4.1 Loi uniforme à densité	528
4.2 Loi exponentielle	531
4.3 Loi de Cauchy	532
4.4 Loi de Laplace	534
4.5 Loi gamma	535
4.6 Loi normale (de Laplace-Gauss)	537
5. Estimation	540
5.1 Estimation d'un nombre inconnu	541
5.2 Estimation d'un intervalle inconnu	542
5.3 Intervalles de confiance pour un nombre inconnu	543
5.4 Intervalles de confiance pour l'espérance d'une loi normale	546
Tables des lois usuelles	548
Index	554

Sous la direction de Christian Gautier et André Warusfel
Bruno Caminade • Serge Nicolas

MATHÉMATIQUES TOUT-EN-UN • ECS 2^e ANNÉE Cours, exercices et problèmes

Cet ouvrage couvre en un seul volume la totalité des programmes de mathématiques de la 2^e année des classes préparatoires économiques et commerciales. Il concerne principalement la filière scientifique, mais pourra être également utilisé avec profit par les élèves de la filière économique, ainsi que par les élèves des classes préparatoires BCPST et B/L.

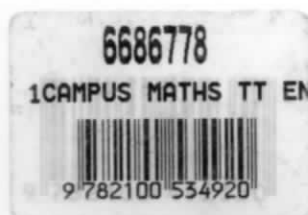
Conçu comme un ouvrage de référence, ce livre propose à son lecteur une vision globale du cours dans le strict respect des programmes. Il se compose de 13 chapitres s'articulant autour de quatre grands thèmes :

- Algèbre linéaire et bilinéaire
- Analyse
- Probabilités et Statistique
- Informatique

De nombreux exercices et problèmes complètent le cours, ce qui permet au futur candidat de s'entraîner efficacement dans l'optique des concours. **Les corrigés détaillés sont tous disponibles en ligne sur Internet, dans la rubrique « Compléments en ligne » associée à cet ouvrage sur le site www.dunod.com.**

CHRISTIAN GAUTIER
ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud, est professeur au lycée La Bruyère à Versailles.

ANDRÉ WARUSFEL
ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, a été professeur de Mathématiques Spéciales au lycée Louis-le-Grand à Paris et Inspecteur général de mathématiques.



ISBN 2 10 049235 7

www.dunod.com

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

